УДК 519.63

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **В.Г. Пименов, М.А. Паначев**

Ключевые слова: уравнение переноса; запаздывание; смешанное функционально-дифференциальное уравнение; численные методы; порядок сходимости.

Уравнение переноса с эффектом запаздывания сводится к смешанному функционально-дифференциальному уравнению. Для его численного решения используются многошаговые бесстартовые процедуры с одномерной интерполяцией.

При математическом моделирование многих объектов, особенно в биологии и медицине, встречаются уравнения переноса с эффектом запаздывания различных видов [1], численные методы решения которых в настоящее время активно развиваются [2]. Если нет запаздывания, то можно свести уравнение переноса к обыкновенному дифференциальному уравнению (метод характеристик). Аналогичный прием при наличии запаздывания сводит уравнение переноса к смешанному функционально-дифференциальному уравнению [3] специального вида. В работе предлагаются численные алгоритмы решения таких уравнений, которые, с одной стороны, учитывают его специфику, а, с другой стороны, дают больший порядок сходимости, чем ранее рассмотренный метод [4], при минимальных вычислительных затратах.

Рассмотрим уравнение переноса с наследственностью

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z,y)+a\frac{\partial u}{\partial z}(z,y)=f(z,y,u(z,y),u_y(z,\cdot)). \tag{1}$$

Здесь $u(z,y)$ — искомая функция, $z\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ — независимые переменные; $u_y(z,\cdot)= =\{u(z,y+s),-\tau\leqslant s<0\}$ — функция предыстория искомой функции к моменту y, τ — величина запаздывания.

Заданы начальные условия: $u(z,y)=\varphi(z,y)$, $z\geqslant 0$, $y\in[-\tau,0]$, и граничные условия: $u(0,y)=\psi(y)$, $y\geqslant 0$.

Будем предполагать, что функционал f и функции φ и ψ таковы, что задача имеет единственное решение.

Сделаем замену независимых переменных $t=z+ay, x=z-ay$, тогда уравнение (1) сводится к смешанному функционально-дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt}(x,t)=F(x,t,u(x,t),u_{x,t}(\cdot)),\ t\geqslant 0,\ -t\leqslant x\leqslant t, \tag{2}$$

где $u_{x,t}(\cdot)=\{u(x-as,t+as),-\tau\leqslant s<0\}$ — функция влияния в точке с координатами (x,t).

Проведем дискретизацию задачи. Пусть $\tau/\Delta=K$ — целое, введем $t_j=ja\Delta$, $j=0,\ldots$ $\ldots,M$; $x_i=ia\Delta$, $i=-j,\ldots,j$. Дискретной моделью будем называть $u^i_j\approx u(x_i,t_j)$.

Предысторией дискретной модели в точке (x_n,t_m). назовем множество $\{u^i_j\}_{(n,m)}= =\{u^{n-k}_{j+k},0\leqslant k\leqslant K\}$. Оператором одномерной интерполяции назовем отображение $\{u^i_j\}_{(n,m)}\to v^n_m(\cdot)\in Q$, где Q — множество функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau,0]$, с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа.

Рассмотрим частный случай многошаговых методов — явные бесстартовые процедуры [5], эти методы при известной предыстории не требуют «разгона», как другие многошаговые методы. Среди них — аналог явного метода Эйлера

$$u^n_{m+1} = u^n_m + \Delta F(x_n, t_m, u^n_m, v^n_m(\cdot)), \tag{3}$$

где $v^n_m(\cdot))$ — результат кусочно-постоянной интерполяции предыстории; аналог правила средней точки

$$u^n_{m+1} = u^n_{m-1} + 2\Delta F(x_n, t_m, u^n_m, v^n_m(\cdot)), \tag{4}$$

где $v^n_m(\cdot))$ — результат кусочно-линейной интерполяции предыстории; четырехшаговый метод

$$u^n_{m+1} = -\frac{2}{5}u^n_m + \frac{6}{5}u^n_{m-1} + \frac{2}{5}u^n_{m-2} - \frac{1}{5}u^n_{m-3} + \frac{12}{5}\Delta F(x_n, t_m, u^n_m, v^n_m(\cdot)), \tag{5}$$

где $v^n_m(\cdot))$ — результат кусочно-параболической интерполяции предыстории.

Определение 1. Будем говорить, что метод сходится с порядком p, если существует такая константа C что выполняется неравенство: $|u(x_i, t_j) - u^i_j| \leqslant C\Delta^p$ для всех $j = 1, \ldots, M$ и $i = -j, \ldots, j$.

Теорема 1. *Если точное решение задачи* (2) *обладает соответствующей гладкостью, то метод* (3) *сходится с порядком* 1, *метод* (4) *сходится с порядком* 2, *метод* (5) *сходится с порядком* 3.

Проведенные численные эксперименты показали эффективность построенных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wu J.* Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

2. *Волканин Л.С.* Численное решение уравнения переноса с эффектом наследственности // Теория управления и математическое моделирование. Ижевск: ИжГТУ, 2012. С. 12-13.

3. *Мышкис А.Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ, 2003. Т. 4. С. 5-120.

4. *Пименов В.Г., Паначев М.А.* Численные алгоритмы и программы для решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Теория управления и математическое моделирование. Ижевск: ИжГТУ, 2012. С. 60-61.

5. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. РХД. Москва; Ижевск, 2004.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана поддержана грантом РФФИ 13-01-00089 и программой АВЦП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем» .

Pimenov V.G., Panachev M.A. SOLUTION OF ADVECTION EQUATION WITH DELAY BY USE OF NUMERICAL METHODS FOR MIXED FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The advection equation with effect of delay is reduced to the mixed functional differential equation. For its numerical solution multistep startingless procedures with one-dimensional interpolation are used.

Key words: advection equation; delay; mixed functional differential equation; numerical method; order of convergence.